1.

DISCORSO PER L'INAUGURAZIONE DEGLI STUDI UNIVERSITARI A PAVIA IL 16 NOVEMBRE 1873

Conscio della mia pochezza, vi chiedo, o Signori, tutta l'indulgenza, essendo che non temerità mi fa salire questi gradini, ma doverosa obbedienza alla Facoltà, che volle indeclinabilmente onorarmi di soverchia fiducia. Ho fatto quanto potevo affinchè almeno la sostanza del mio dire potesse parere non indegna dell'odierna circostanza, che ero lontano dal prevedere contristata dall'assenza dolorosa del benemerito Capo dell'Università. Vorrei che non vi fosse discara la scelta dell'argomento, il quale, sebbene sia tra i più elevati che la scienza odierna stia agitando, nondimeno è per qualche parte accessibile a tutti quelli che hanno studiato gli elementi delle matematiche, e può interessare nelle sue conclusioni tutte le persone colte. Esso versa sulla natura dello spazio, sulla natura, sull'origine degli assiomi geometrici, i quali, e specialmente l'XI di EUCLIDE, furono, come sapete, il tormento millenario della classica geometria.

L'assioma XI, meno propriamente chiamato postulato di EUCLIDE, è il seguente:

Se una linea retta, cadendo sopra due altre, fa gli angoli interni da una medesima parte la cui somma sia minore di due retti, quelle due prolungate da questa parte s'incontreranno.

Esso può tradursi in altri equivalenti, quali sono: la somma degli angoli di un triangolo rettilineo vale due retti; per un punto dato si può condurre una ed una sola parallela ad una retta data.

I moltissimi tentativi che la storia ricorda da EUCLIDE in poi per dimostrare a priori questa proprietà riuscirono infruttuosi; le dimostrazioni che taluni credettero d'aver trovato, una delle quali

trasse ancora in inganno nel 1870 un illustre membro dell'Istituto di Francia, non furono che una passeggiera illusione.

Lo spirito critico moderno, come in altre discipline, così in geometria, ha cercato di riconoscere esattamente qual parte abbia avuto la pura ragione, quale l'esperienza nella formazione dell'edificio scientifico. Questa ricerca presentava gravissime difficoltà. I sensi, mettendoci in relazione coll'estensione, ci fanno conoscere un certo numero di proprietà senza intervento della logica deduttiva. Fra queste proprietà talune si insinuano sin dai primordii della vita così di continuo e con tale aspetto di semplicità e di evidenza da imporsi come necessarie anche allo spirito del più acuto pensatore. Egli è perciò che la tradizione ha potuto per tanti secoli tenerci ingannati sulla loro origine, cioè sull'intervento essenziale dei sensi nella loro scoperta; facendoli confondere, sotto il nome di assiomi, con le verità astratte che appartengono alla scienza puramente razionale della grandezza, cioè all'analisi matematica (nella quale intendo compresa anche l'aritmetica sì particolare che generale).

Per portare sicuro giudizio sull'ambiente di coteste quasi insuperabili illusioni, era necessario di poter considerare tale ambiente, cioè lo spazio, da un punto di vista situato fuori del medesimo. Era necessario insomma di studiare, che non si era mai fatto, il concetto astratto, generale delle grandezze di più dimensioni; visto dal quale, non coll'occhio fisico, e neanche dell'imaginazione, ma con quello dell'analisi matematica, il concetto del nostro spazio potesse essere riconosciuto qual caso particolare, non soltanto perchè di tre fra grandezze possibili di qualunque altro numero di dimensioni, ma anche e principalmente perchè uno fra molti concetti analoghi, ma non identici, di altre grandezze possibili estendentisi in tre dimensioni.

Gauss sembra essere stato il primo a riconoscere questa necessità, e farla riconoscere a Riemann suo scolaro, il cui genio non poteva sfuggire alla penetrazione di tanto Maestro. Il fatto è che Riemann, poco dopo la propria laurea, si accingeva a trasportare sull'ali dell'analisi matematica le nozioni fondamentali che tutti abbiamo dello spazio nelle regioni ideali delle grandezze aritmetiche di più dimensioni e riusciva a dare largo e sicuro principio a questo studio, porgendo in pari tempo la risoluzione di una parte dei problemi che vi s'incontrano. Questo lavoro, che ha per titolo «*Sulle ipotesi che servono di fondamento alla geometria*», veniva da Riemann presentato nel 1854 per la propria ammissione alla Facoltà filosofica di Gottinga, ma non stampato fino al 1867, un anno dopo che la morte ebbe rapito a 40 anni tal pensatore, che con poche

pagine, in questa come in altre questioni cardinali .... (1) provocando la gara tra gli stessi primi uomini della scienza a chi meglio potesse abbracciarne e svolgerne a pieno le idee.

In questo medesimo tempo due altri sommi, il sig. CAYLEY e il sig. HELMHOLTZ, ciascuno senza sapere degli altri, venivano meditando sull'argomento; il sig. CAYLEY, assai diversamente, ma il sig. HELMHOLTZ battendo in senso inverso porzione della via di RIEMANN. Il lavoro del sig. CAYLEY, costituente la *Sesta memoria sulle quantiche*, leggesi nelle Transazioni filosofiche di Londra pel 1860; quello del sig. HELMHOLTZ, « *Sui fatti che stanno a base della geometria* », si legge nelle Notizie della Società delle scienze dell'Università di Gottinga pel 1868. In questo medesimo anno vennero in luce, nel Giornale di Matematiche di Napoli e negli Annali di Matematica di Milano, due memorie del nostro insigne matematico, il sig. BELTRAMI, coi titoli « *Saggio d'interpretazione della geometria non euclidea* », « *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante* », e finalmente vuol essere citato il lavoro del sig. KLEIN « *Sopra la cosidetta geometria non euclidea* », che è in corso di pubblicazione negli Annali di CLEBSCH e NEUMANN.

Tutti questi scritti però, che si fondano in gran parte sull'uso delle coordinate curvilinee introdotte nella scienza da BORDONI e da GAUSS nel 1821, mentre sono i più generali ed importanti per l'ulteriore sviluppo del nostro argomento, non sono i primi che intorno al medesimo siano comparsi, e non furono essi che attrassero l'attenzione generale dei matematici sui tanto cimentati misteri. Sino dal 1829 e 1832 il matematico russo LOBATSCHEWSKY e l'ungherese GIOVANNI BOLYAI (WOLFANGO BOLYAI suo padre aveva visitato GAUSS a Gottinga fin dal 1797) avevano dato alle stampe loro studi geometrici, nei quali dichiaravano la vera natura dell'XI assioma e la possibilità di una completa teoria geometrica indipendente dal medesimo. Ma i loro nomi, insieme coi loro lavori, rimasero pressochè ignorati per ben 30 anni insino a quando nel 1862 la pubblicazione della corrispondenza epistolare tra GAUSS e SCHUMACHER venne a palesare, che il principe dei matematici, così chiamandosi GAUSS dai contemporanei, nutriva precisamente le stesse idee, che anzi egli ne era in possesso sino dal 1792 e che sovr'esse aveva fabbricato una geometria che diceva non euclidea (2).

(1) [parole illeggibili nel manoscritto].

(2) Ciò si poteva anche indovinare per indicazioni sparse nella seconda sua memoria sui residui biquadratici e nelle Gelehrte Anzeigen di Gottinga e nella

Fu questa pubblicazione che ebbe la virtù di provocare l'attuale corrente sul nostro argomento, del quale ormai per la comparsa dei lavori sopra citati, si può dire, che il progresso sia assicurato, e già a quest'ora è tale da permettere a noi di spingere la vista molto al di là dei secolari confini e riconoscere quali siano i fondamenti empirici od ipotetici che bisogna porre per fabbricare una geometria, e quali in particolare siano quelli sui quali si eleva la geometria euclidea, creduta finora la sola possibile non soltanto nel mondo dei sensi, ma anche nel più vasto del pensiero.

Io qui cercherò di spiegare il concetto delle grandezze di una, due, ... n (cioè numero qualunque) dimensioni, e come l'analisi matematica possa essere lo strumento per istudiarle; e poi considererò più particolarmente il concetto delle grandezze per noi più interessanti, cioè delle estese in due e tre dimensioni.

L'idea di grandezza non può nascere se non in relazione ad un concetto generico, suscettibile di vari modi di determinazione. Mi permetterò di dire che i vari modi di determinazione di un concetto costituiscono una *varietà*. E chiamerò *continua* una siffatta varietà, oppure *discreta*, secondo che sia o no possibile di passare da uno ad altro dei singoli modi per gradi insensibili, o, come dicono i matematici, per variazione continua. Il concetto generico di temperatura di un corpo dà luogo ad una varietà continua, essendo un corpo suscettibile di infiniti stati di temperatura succedentisi per gradi o differenze insensibili. Il concetto invece di temperatura di un certo numero di corpi determinati in un determinato istante, o quello di statura in una data fila di soldati, dà luogo ad una varietà discreta.

Una porzione di una varietà, separata dalla restante per opportuni segni o limiti, dicesi una quantità o grandezza. Il paragone delle quantità dal punto di vista del più o meno grande, si fa nelle varietà discrete coll'enumerazione, nelle continue colla misura (numero di soldati in una porzione di fila, misura di un intervallo di temperatura mediante l'intervallo assunto come unità). Lascio affatto in disparte da qui innanzi le varietà discrete.

Per designare uno isolatamente fra i modi di determinazione possibili in una varietà continua, userò coi matematici la parola *punto*.

memoria di giubileo. Tralascio molte citazioni: *Lieux analytiques* di CAUCHY, ecc. SCHLÄFLI, disperando di poter far ricerche nell'usuale spazio senza imbattersi in quelle del suo famoso compaesano (STEINER), cercò negli spazi di 4, 5, ..., n dimensioni (retti però dalla formula $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + \ldots + du^2}$) il numero delle figure regolari, i volumi, ecc.

Quando havvi una sola maniera di passare da un punto ad un altro in una varietà, questa si dice *semplice* o dotata di una sola dimensione; e ne è dunque carattere essenziale il seguente: che da un punto non si può passare a punti attigui in essa se non che secondo due direzioni, avanti od indietro (tempo, linea, temperatura).

Se poi le maniere o direzioni secondo cui si può passare da un punto agli attigui costituiscono una varietà continua di una dimensione, la varietà considerata si dice *doppia* o di due dimensioni (superficie; suono, considerandone l'intensità e l'altezza).

Tripla si dice la varietà se il passaggio da un punto agli attigui può farsi in una varietà doppia di maniere (lo spazio, il sistema dei colori). E così continuando, si giunge al concetto generale di varietà ennupla, ossia di n dimensioni.

Per provare adesso rigorosamente come lo studio di queste varietà entri nel dominio dell'analisi matematica, sarebbe a dimostrarsi che la determinazione di un punto in una varietà data qualsiasi può farsi per mezzo di quantità aritmetiche cioè di numeri. Ma tale dimostrazione non può qui trovar posto; mi limiterò dunque a richiamare come siasi attuata questa determinazione per alcune tra le varietà più usuali.

Perciò osservo anzitutto come la continuità che noi intuiamo nel modo di variare delle quantità concrete nello spazio e nel tempo siasi introdotta anche nel modo di variare delle quantità aritmetiche. Siffatta continuità ha cominciato a parere possibile mercè la interpolazione dei numeri fratti, commensurabili, nella primitiva serie degli intieri

$$0 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 2 \quad \ldots\ldots$$

Infatti imaginiamo inseriti i mezzi, i terzi, i quarti, ..., i milionesimi. Contando soltanto per un momento questi ultimi, abbiamo la serie

$$0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots 1, \frac{m+1}{m}, \frac{m+2}{m}, \ldots, 2, \ldots,$$

in cui il passaggio da un termine al successivo, e quindi ad altro qualsiasi, si fa per grado già assai piccolo in confronto dell'unità; e se procediamo ad interpolare i due, i tre, ... i centomilionesimi, ..., i bilionesimi, ..., i trilionesimi, ..., i quadrilionesimi, ... e via, via, vediamo come già per mezzo dell'interpolazione commensurabile si possa concepire il passaggio da uno ad altro numero per gradi quanto si voglia estremamente piccoli. I matematici non si sono

fermati a questa interpolazione; essi hanno interpolato già da tempo nella stessa serie altre specie di numeri, gli incommensurabili provenienti dall'estrazion di radice e dall'estrazion di logaritmo; e col crescere della potenza della loro analisi seguitano a scoprire nuove e nuove specie di incommensurabili da concepirsi inseriti fra i precedenti, come col crescere del nostro poter visivo mercè del microscopio riconosciamo per così dire nuovi e nuovi punti frammezzo ai già visti in una linea o filo materiale. Per tal via dunque i matematici giungono a concepire che il passaggio da un numero p. e. 4 ad un altro p. e. 11 si possa effettuare non solo saltuariamente per gradi sensibili, p. e. eguali all'unità come in

$$4, \quad 4+1, \quad 4+2, \ldots . 4+7,$$

od eguali a un milionesimo come in

$$4, \quad 4+\frac{1}{m}, 4+\frac{2}{m}, \ldots,$$

ma anche per gradi di inassegnabile piccolezza, per gradi insensibili, infine nel modo stesso con cui passa da uno ad altro stato una grandezza variabile dell'ordine concreto.

Consideriamo la varietà semplice chiamata tempo. Fissato l'istante, p. e. un mezzogiorno, a cominciare dal quale vuolsi considerare il decorrer del tempo e fattogli corrispondere il numero zero, mentre il numero 1 deve corrispondere al termine della prima unità di tempo, la dichiarata continuità permette d'immaginare che alla serie degli istanti corrisponda punto per punto la serie dei numeri; ed una volta ben stabilita questa corrispondenza, è chiaro che un istante resterà determinato se si dia il numero a cui deve corrispondere, cioè è chiaro che la determinazione del punto nella varietà *tempo* si potrà fare per mezzo di un numero.

Nei ragionamenti della matematica superiore entrano sempre le così dette variabili continue. Una quantità si dice variabile continua quando s'immagina che possa passare in modo continuo per tutti i gradi di grandezza aritmetica crescendo o diminuendo come si voglia; e per brevità di linguaggio e di scrittura si usa di esprimerla con una lettera dell'alfabeto (x, y, z...). E però il decorrer del tempo si assimila al variare di una variabile continua; i successivi istanti si pensano determinati dai successivi valori di tale variabile.

Come nel tempo, così in qualunque altra varietà semplice, si può concepire una siffatta determinazione dei punti per mezzo dei valori

di una variabile continua. Per una linea, un punto qualunque P in essa si può imaginare determinato per mezzo del valore di una variabile che esprima la lunghezza della porzione di essa linea che principia in un punto fisso O e termina in P. Insomma il concetto generico di varietà semplice astrattamente si traduce in quello di variabile continua.

Passiamo alle varietà doppie. Una classe di esempi l'abbiamo in quelle varietà di punti che chiamiamo superficie. Prendiamo una superficie qualunque e da un punto O in essa imaginiamo le geodetiche uscenti secondo tutte le direzioni possibili (geodetica tra due punti in una superficie dicesi una linea di minima possibile lunghezza tracciabile nella superficie tra essi punti. In una superficie piana le geodetiche si chiamano rette, in una sfera sono archi di circolo massimo). Ora, poichè le direzioni intorno ad O costituiscono una varietà semplice, potremo determinarle coi valori di una variabile x. E però la determinazione di ogni singolo punto P nella superficie si potrà fare per mezzo dei valori numerici di x e di una seconda variabile y; il primo designando la direzione ossia la geodetica a prendersi nel partire da O, il secondo la porzione OP da percorrersi in questa geodetica per arrivare al punto. Questi valori si chiamano le coordinate del punto. Poichè ad ogni punto corrisponde una coppia di valori di x e y, muoversi nella superficie vale analiticamente passare da coppia a coppia, ossia far variare x e y; e le questioni geometriche relative alla superficie si traducono in questioni di analisi matematica.

Come altro esempio di varietà doppie considerando il suono, potremo imaginare che una variabile x corrisponda all'intensità, ed un'altra y all'altezza. Un punto in questa varietà, cioè un suono particolare, resterà determinato se se ne diano la intensità e l'altezza, cioè i corrispondenti valori di x e y. Possiamo notare come l'indole di questa varietà sia assai diversa da quella di una superficie. In una superficie le lunghezze p. e. delle linee sono paragonabili tra loro in tutte le direzioni; mentre per un suono non possiamo quantitativamente paragonare una differenza d'intensità con una differenza d'altezza.

Ma lasciando in disparte ogni altro particolare conchiudo che il concetto di varietà doppia si traduce in quello di sistema di valori di due variabili.

Passiamo alle varietà triple. L'esempio più familiare è quello dello spazio. Fissiamo in esso un punto O ed immaginiamo le geodetiche, che diciamo linee rette, uscenti da O in tutte le direzioni possibili. Poichè

queste direzioni costituiscono una varietà di due dimensioni, potremo rappresentarle con le coppie di valori di due variabili x e y; e se inoltre determiniamo i punti su ciascuna geodetica mediante i valori d'una terza variabile z, la posizione di ciascun punto dello spazio resterà determinata per mezzo di tre numeri, tre coordinate, valori particolari delle tre variabili x, y, z. Per determinare la posizione di una stella rispetto alla terra si suol darne l'azimut e l'altezza, oppure l'ascenzione retta e la declinazione, oppure la longitudine e la latitudine. Ciascuna di queste coppie di coordinate esprime un possibile significato per x ed y, indicando la direzione secondo cui bisogna guardare per vedere la stella. A fissare del tutto il suo posto occorre una terza cordinata, la z, la distanza dalla stella alla terra. In questo esempio si vede che si possono prendere diversi sistemi di coordinate per determinare i punti. A questo riguardo giova notare che il sistema delle coordinate si può mutare quante volte si voglia per ciascuna varietà; soltanto il numero delle coordinate non cambia. I sistemi testè indicati per superficie qualunque e per lo spazio si dicono polari. Assai importanti per la teoria della superficie piana e dello spazio sono particolarmente le coordinate cartesiane. In un piano queste sono le distanze del punto P da due rette fisse, nello spazio sono le distanze da tre piani fissi.

Senza fermarmi ad altri esempi, ritengo abbastanza spiegato che ciascuna varietà tripla può essere concepita come un sistema di punti, a ciascuno dei quali corrispondono, ovvero ciascun dei quali tiene in sé tre numeri, valori particolari di tre variabili continue, di tre coordinate, i quali valori cambiano per gradi insensibili, da punto a punto attiguo in essa varietà. Così una varietà n-pla può essere pensata come un sistema di punti, ciascun dei quali tiene in sè n numeri, che sono le sue coordinate.

Ma questo generico concetto di n-pla infinità di punti, o sistemi di valori di n variabili, non è per così dire altro ancora che un caos di numeri nei quali la mente non vede nessun significato, dai quali non può dedurre nulla, nessun rapporto nè metrico, né d'altra specie, circa la distribuzione dei punti. Ma vogliamo che il significato, la luce, si faccia per l'occhio della mente, vogliamo che questa varietà caotica di numeri si presenti come una varietà retta da leggi, suscettibile di una teoria, e propriamente come una varietà estesa, in cui si possano fare determinazioni metriche, uno spazio insomma regolato da una qualche geometria? Basta creare per essa il concetto fondamentale di distanza tra ogni due punti, assegnando una formola composta delle coordinate di due punti qualunque come

espressione della distanza fra essi punti. Se si assegni p. e. la formola

$$\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

come espressione della distanza fra i punti di coordinate x, y; x', y' in una varietà doppia; allora dai diversi valori numerici che prenderà questa formola colla sostituzione delle numeriche coordinate di punti particolari, potremo riconoscere come stieno tra loro le distanze tra ogni diversi due punti; per qual serie di punti si deva passare a fin di giungere da un tale ad un tal altro secondo la minima distanza, cioè potremo riconoscere la natura, le proprietà delle linee geodetiche. e stabilire di mano in mano altre ed altre proposizioni. Nel presente caso giungeremmo a trovare tutta la planimetria di EUCLIDE, perchè colla fissazione di quella formola abbiamo tratto dal caos quella varietà estesa che diciamo superficie piana.

Ma io qui ho fatto un salto. Ed invero si può domandare: se sia assolutamente il concetto di distanza tra due punti che bisogna porre inizialmente per conseguire una varietà estesa, una varietà che presenti gli attributi principali che tutti osserviamo nel comune spazio? E se può scegliersi ad arbitrio la formola per significare la distanza? Ora dunque rifletto che per poter fare determinazioni metriche in una varietà bisogna che in essa qualche grandezza sia indipendente dal luogo. Questo si può in verità imaginare attuato in più d'una maniera; ma la maniera che si offre per la prima e che perciò RIEMANN prese a svolgere, si è di supporre che tale indipendenza spetti alla lunghezza delle linee, e che quindi ciascuna linea si possa misurare per mezzo di ciascun'altra. Prendendo una porzione infinitesima di linea, la sua lunghezza coincide colla distanza dei suoi punti estremi, e si è dunque condotti a dover stabilire il concetto di distanza, ossia una formola che la esprima analiticamente. E' subito visto che la formola non può essere affatto arbitraria, se la varietà ha da presentare i principali caratteri dello spazio. RIEMANN ricerca qual possa essere la forma generale di tale formola; e sotto qualche restrizione corrispondente ai casi più semplici trova essere quella della radice quadrata

$$\sqrt{a\,dx^2 + b\,dy^2 + c\,dx\,dy + \text{etc.}}$$

di un polinomio omogeneo di secondo grado rispetto alle differenze infinitesime $dx = x' - x$, $dy = y' - y$, ... delle coordinate, i cui coefficienti a, b, c ... sono funzioni delle coordinate x, y, z ... di

uno dei due punti, cioè quantità che dipendono da queste coordinate, ossia che variano al variare di queste. Prendere per a, b, c.. un determinato sistema di funzioni vale quanto determinare completamente l'indole della varietà. Nel caso di due dimensioni, e però della formola

$$\sqrt{a\,dx^2 + b\,dy^2 + c\,dx\,dy}\,,$$

abbiamo già detto che prendendo $a=1$, $b=1$, $c=0$ si ha la varietà affatto determinata chiamata il piano. Se invece prendessimo $a=\operatorname{sen}^2 y$, $b=1$, $c=0$, avremmo la sfera. Prendendo altri ed altri sistemi di funzioni potremmo avere altre ed altre nuove varietà o spazii di due dimensioni, e formare per ciascuno una teoria, come fece EUCLIDE per il piano. Il caso di due dimensioni, da punti di vista più o meno diversi, si soleva già considerare dal 1821 in poi. Ma adesso riconosciamo che l'analisi matematica offre parimenti il mezzo di creare astrattamente quanti spazii si vogliano di tre, di quattro, ecc. dimensioni ed una geometria per ciascuno col prendere il voluto numero di coordinate e comporre nuovi e nuovi casi particolari della formola su indicata. Ed anche la riproduzione analitica di quel qualunque spazio che i sensi ci avessero rivelato sarebbe fatta, tostochè fosse scoperto in qual modo vada per esso composta la formola.

Le cose dette possono bastare per far sentire come la teoria del nostro spazio entri nel dominio dell'analisi matematica e vi entri subordinata ad una teoria generale delle grandezze estese in tre dimensioni, e più ancora subordinata alla teoria generalissima delle grandezze estese in n dimensioni. Nelle quali teorie, appunto perchè affatto astratte, ossia affatto indipendenti dai sensi, non ci troviamo esposti alle illusioni dalle quali non poterono salvarsi i nostri padri insino a GAUSS. E poichè si vengono a trovare così possibili nel pensiero infinite qualità di spazii anche a tre dimensioni, per ciascuno dei quali si può fabbricare una geometria con perfetta consistenza logica come quella di EUCLIDE, la creduta necessità logica di questa cade, e si presenta spontanea la domanda: quali siano le particolarità, ossia i caratteri, gli assiomi che distinguono, che determinano frammezzo a tutti i possibili, lo spazio in cui viviamo? Ed è chiaro che la risposta non può venire che dai sensi, e costituisce la parte sperimentale del concetto e della teoria del nostro spazio [3].

[3] La geometria (HOÜEL), come la meccanica e la fisica, ha per oggetto lo studio di una grandezza concreta, l'estensione, la quale affetta i nostri sensi in modo suo proprio; e soltanto pei sensi si possono conoscere le proprietà caratteristiche di questa specie particolare di grandezze.

Passo dunque a dire quali siano questi caratteri; avvertendo che invece di quelli che indicherò, altri ed altri si potrebbero indicare, equivalenti ai primi nel loro complesso.

Torniamo alla formola di RIEMANN. Se sia n il numero delle coordinate, sarà $\frac{n(n+1)}{2}$ il numero delle funzioni $a, b, c \ldots$ dalla cui scelta dipende la natura dello spazio n-plo. Però potendosi cambiare il sistema delle coordinate, cioè potendosi prendere invece delle $x, y, z \ldots$ altrettante funzioni arbitrarie di n nuove coordinate, colla introduzione di queste funzioni al posto delle $x, y, z, \ldots$ nella formola della distanza si può far sì che n dei coefficienti in questa formola diventino funzioni prestabilite a volontà. Ma gli altri $\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$ coefficienti resteranno determinati indipendentemente da ogni nostro arbitrio, e però determinati dalla natura dello spazio a cui la formola si riferisce. Dunque la determinazione dei rapporti metrici dello spazio dipende da questi $\frac{n(n-1)}{2}$ coefficienti. Queste funzioni sono la espressione analitica dei caratteri di questo spazio. Al sistema di queste funzioni RIEMANN sostituisce il sistema di $\frac{n(n-1)}{2}$ altre funzioni che denomina le curvature dello spazio, e che si possono dire curvature gaussiane di $\frac{n(n-1)}{2}$ superficie passanti per il punto di coordinate $x, y, z \ldots$ ed appartenenti ad esso spazio.

Io non posso qui spiegare in breve la bella maniera con cui la idea vaga che ciascuno ha di curvatura di una superficie in un punto venne da GAUSS tradotta in un concetto preciso aritmetico; dirò soltanto che, tracciando intorno al punto un qualsivoglia triangolo geodetico sulla superficie, l'eccesso della somma dei suoi angoli sopra due retti, misurato in parti del raggio (cioè in modo che l'angolo retto abbia per misura $\frac{\pi}{2}$) e diviso per l'area del triangolo, diventa, coll'impiccolir del triangolo, eguale a questa curvatura.

Prendiamo ora ad esempio gli spazii di due dimensioni, che noi intuiamo come superficie. Abbiamo $\frac{n(n-1)}{2} = 1$, cioè naturalmente una sola curvatura. Per la superficie piana questa curvatura è nulla in ogni punto, poichè a definire il piano concorre appunto l'XI assioma (che la somma degli angoli di un triangolo non ecceda ma

eguagli due retti). Per una sfera (intendo la superficie) questa somma è maggiore di due retti; la curvatura non è nulla, ma positiva, e costante, cioè la stessa in tutti i punti e reciproca del quadrato del raggio. Per la superficie di un uovo la curvatura è positiva ma non eguale per tutti i punti.

In questi esempi il concetto della curvatura gaussiana s'accorda con la vaga idea volgare di curvatura. Ma l'accordo non ha luogo sempre. Per una superficie cilindrica la curvatura gaussiana è nulla, mentre volgarmente si direbbe che questa superficie ha curvatura. E l'ha innegabilmente; ma semplice per così dire, cioè soltanto trasversalmente alle generatrici. La curvatura gaussiana può dirsi il prodotto delle curvature di due linee tracciate sulla superficie in due determinate direzioni perpendicolari tra loro. Se le due curvature componenti sono d'egual senso, come per una sfera, la curvatura composta è positiva; se le componenti sono nulle, come nel piano, o se anche una sola è nulla, come per una superficie cilindrica o conica, la composta è nulla; se finalmente le componenti sono di senso contrario, come p. e. nella superficie di una sella, o in questo modello [4], la composta è negativa. Dove la curvatura è negativa, è negativo l'eccesso della somma degli angoli di un triangolo sopra due retti, cioè tal somma è minore di due retti. La curvatura negativa può, come la nulla nel piano e la positiva nella sfera, essere costante per tutta una superficie. Le superficie a curvatura costante negativa hanno grande importanza nel nostro argomento; esse furono egregiamente spiegate nel citato *Saggio* del Sig. BELTRAMI, che le disse *pseudosferiche*.

Voi domanderete come mai la curvatura gaussiana sia il solo carattere che distingue, secondo RIEMANN, una superficie dall'altra, mentre vi hanno superficie per noi diverse, come in particolare le piane e le cilindriche, dotate della medesima curvatura? La risposta è facile ed importante. In questa teoria una superficie si considera in se stessa esclusivamente, nei suoi rapporti metrici interni, senza riferimento a veruna cosa posta fuori dalla medesima, si pensa come uno spazio di due dimensioni esistente per sè, costituente da solo per così dire l'intero mondo; e non già come una superficie che

(4) [L'oratore presentò un modello, in carta, di tale superficie, costruito dal BELTRAMI. Una descrizione del modello, e notizie sul medesimo (ora posseduto dall'Istituto Matematico della R. Università di Pavia) si trovano nella Nota di R. BONOLA, *Il modello di Beltrami di superficie a curvatura costante negativa*, Boll. di bibliografia e storia delle scienze matematiche, 9 (1906), p. 33-38].

esista in relazione con altre superficie o linee o punti fuori di essa e coesistenti in uno spazio p. e. di tre dimensioni.

Considerando una superficie come una tela finissima di fili flessibili ma inestendibili tesi geodeticamente nella superficie tra ogni due suoi punti, si riconosce che si può in generale dare alla superficie forme differenti senza lacerare verun filo; e per tutte queste forme insieme colle mutue distanze dei punti resteranno inalterati tutti quanti i rapporti metrici inerenti alla tela; e noi avremo in esse forme altrettante superficie diverse tra loro se si considerino rispetto a cose poste fuori delle medesime, ma tutte identiche tra loro se si considerino soltanto le loro proprietà interne; tutte identiche in quanto alla loro geometria di due dimensioni. Per questa geometria assoluta di ogni singola tela è dunque p. e. indifferente che una tela piana si tenga distesa o si rotoli in forma di cilindro; che questa tela pseudosferica si tenga arrotolata o si svolga e si disponga in tutte le forme di cui è suscettibile, le quali sono diverse pel nostro occhio di tre dimensioni, solo in quanto esso vede e confronta la superficie con altre cose esistenti fuori della medesima. Or bene, tutte le superficie identiche tra loro in quanto alla curvatura gaussiana non sono altro appunto che forme o disposizioni differenti di un'unica tela, nel senso qui dichiarato.

Essendo importantissima questa idea di teoria assoluta di un determinato spazio (per noi adesso di uno spazio a due dimensioni), al fine di viemeglio concepirla imaginiamo (con GAUSS, HELMHOLTZ e BELTRAMI), poichè logicamente il possiamo, degli esseri intelligenti i quali vivano, si muovano in una superficie, abbiano, direi, un corpo di due dimensioni, e percepiscano soltanto cose che si trovano nella superficie, e siano insomma affatto insensibili a tutto ciò che possa esservi fuori della medesima. Per siffatti abitatori della superficie i fenomeni consistono di movimenti, di figure tracciate nella superficie stessa; le misure che possono intraprendere per valutarli sono sempre a seconda della superficie; e poichè le lunghezze delle linee, le ampiezze degli angoli, le aree dei triangoli, tutte le grandezze geometriche insomma che possono misurare non soffrono alterazioni nei cambiamenti di forma su indicati, così la geometria e con essa tutto il mondo fisico rimane per loro affatto identico in tutte queste forme possibili della superficie.

E qui notiamo di passaggio che questi viventi potranno imaginare quanti spazii vorranno ad una dimensione, che saranno altrettante linee tracciate nella superficie; ma non potrebbero imaginare un secondo spazio di due dimensioni, perchè questo dovendo non

coincidere col loro, è fuori del medesimo, e del fuori essi non hanno coscienza. Così accade di noi; percependo noi soltanto ciò che si svolge nel nostro spazio di tre dimensioni, non possiamo imaginare altri spazii di tre; mentre possiamo imaginare quanti spazi vogliamo di due e di una dimensione, cioè superficie e linee coesistenti nel nostro spazio. Lo imaginare diversi spazii di tre dimensioni sarebbe concesso a chi vivesse in quattro dimensieni.

Per tre dimensioni risulta $\frac{n\,(n-1)}{2} = 3$, cioè dire, sono tre le curvature che devono essere fissate per ciascun punto dello spazio, affinchè la natura di questo resti determinata. Qui si presentano parecchi casi particolari di costanza di curvatura. Possono essere costanti una, due, o tutte e tre le curvature; ed essere eguali o diverse l'una dall'altra. Finora fu studiato il solo caso più semplice e più interessante delle curvature tutte tre costanti ed eguali fra loro, il caso insomma di uno spazio identicamente costituito in ogni luogo ed in ogni direzione. E veramente questo caso fu studiato per qualunque numero di dimensioni e forma l'oggetto della citata *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante* del sig. Beltrami. Ma io non considero che il nostro caso di $n = 3$. Il valor costante della curvatura può essere anche qui positivo, nullo o negativo. Il sig. Klein denomina ellittico lo spazio nel primo caso, parabolico nel secondo, iperbolico nel terzo. Lo spazio parabolico è quello in cui noi supponiamo di vivere, del quale Euclide ci ha tramandato la geometria, e che perciò si dice anche euclideo. Lo spazio iperbolico è quello pel quale Gauss e Lobatschewsky e Bolyai fabbricarono la geometria, ammettendo che la somma degli angoli del triangolo geodetico sia minore di due retti, geometria chiamata non euclidea; e però questo spazio si dice anche non-euclideo o gaussiano.

Passiamo a vedere per quali ragioni sia da credersi che noi viviamo nello spazio euclideo.

La teoria di Riemann e di Helmholtz addita siccome caratteristica di spazio a curvatura costante la proprietà che le figure, i corpi, vi si possono muovere liberamente conservando invariate la forma e grandezza loro. Che questa proprietà appartenga a siffatti spazii, possiamo subito vederlo nelle due dimensioni. Prendiamo una sfera e costruiamovi sopra una figura; poichè potremmo costruire la figura medesima in qualunque altra regione della sfera e con qualunque orientazione, è chiaro che potremmo far muovere cotesta figura liberamente sulla sfera, farla scivolare sulla sfera dovunque, senza alterarsi. La stessa proprietà ha luogo sopra di un piano. La stessa

finalmente ha luogo in una superficie pseudosferica. Senonchè qui, come in generale negli spazii a curvatura costante negativa, la figura dovrà subire nel muoversi talune di quelle flessioni senza alterazioni interne di cui già dissi che non si possono avvertire se non in confronto di cose estranee alla superficie. Prendiamo adesso una superficie a curvatura variabile; una figura costruita in una regione, dove la curvatura sia p. e. positiva, non può scivolare verso regioni di curvatura più piccola p. e. nulla; tutti sappiamo che una calotta sferica non può adagiarsi sopra di un piano. Una figura, un corpo non può muoversi in uno spazio a curvatura variabile se non che deformnadosi continuamente.

Or dunque venendo a noi, poichè tutte le misure fatte di corpi solidi in diverse posizioni nel nostro spazio s'accordano ad attestare che il loro moto può effettuarsi anche senza alterazioni nella loro forma e grandezza, concludiamo che il nostro spazio è a curvatura costante.

Non bisogna però disconoscere che tal conclusione non ha certezza matematica, non è logicamente necessaria, ma soltanto empiricamente assai probabile. La rigidità ossia l'invariabilità di forma nel rigor matematico non può essere dimostrata con misure ossia coll'intervento dei sensi; giacchè questi non avvertono i cambiamenti che stanno sotto un certo limite di piccolezza.

Per qual ragione concludiamo poi che il valore della costante curvatura sia lo zero pel nostro spazio, cioè che questo spazio sia l'euclideo? Questo si conchiude dal fatto che la somma degli angoli dei triangoli, rettilinei, piccoli e grandi, finora potuti misurare, anche con tutta la precisione dell'odierna astronomia, è sempre risultata due retti più o meno quantità piccolissime (centesimi di 1''), le quali si possono tenere come errori d'osservazione.

Anche questa conclusione però non ha certezza, ma soltanto probabilità; il grado di probabilità comportato dalla vastità e precisione delle misure fatte. Pensiamo ancora i viventi in uno spazio di due dimensioni, e propriamente su una sfera. E imaginiamo che l'ambiente della loro attività, la porzione di superficie, voglio dire, alla quale possono estendere le loro misure e calcolazioni, sia piccolissima, come senza dubbio è piccolissimo il nostro ambiente planetario in confronto dell'intero nostro spazio. Quegli abitatori non potrebbero misurare che triangoli piccolissimi in confronto della total sfera, dei quali sappiamo che la somma supera due retti estremamente poco. Se dunque la precisione dei loro metodi e strumenti misuratori non giungesse a mettere in evidenza questo poco, essi potrebbero stimare la detta som-

ma eguale a due retti e quindi creder di vivere, non in una sfera, ma in un piano. La sola conclusione sicura che noi possiamo trarre dalle nostre misure si è che le curvature del nostro spazio sono estremamente piccole, ossia che le loro grandezze reciproche, i così detti raggi di curvatura. sono estremamente grandi in confronto delle dimensioni del nostro sistema planetario. Ma non possiamo per adesso asserire che questi raggi siano ancora grandissimi in confronto delle distanze delle stelle fisse o delle nebulose tra loro.

Delineato uno dei modi per giungere col soccorso dei sensi alla determinazione della natura dello spazio, voglio ora accennare le più essenziali differenze che, per le tre qualità di spazio a curvatura costante, hanno luogo nei fondamenti e però in tutto l'edificio della geometria. Le accenno in riguardo degli spazi a due dimensioni, pei quali si comprendono meglio, in grazia dell'intuizione e cognizione che abbiamo di cotesti spazii.

Gli abitatori di uno spazio a curvatura nulla, cioè di un piano indefinito, troverebbero che fra due punti esiste una ed una sola linea più corta delle altre (quest'è l'assioma della retta); che per un punto si può condurre una ed una sola retta parallela ad altra data (assioma delle parallele); che seguendo sempre una stessa retta si può allontanarsi indefinitamente dal punto di partenza. Eglino insomma troverebbero veri tutti gli assiomi della planimetria d'Euclide.

Gli abitatori invece di spazio a curvatura positiva, di una sfera che potessero percorrere in tutta l'estensione, non troverebbero sempre vero l'assioma della retta, essendo le loro rette archi di circoli massimi, per due punti diametralmente opposti troverebbero un'infinità di rette conducenti dall'uno all'altro. Essi non potrebbero formarsi il concetto delle rette parallele, giacchè tutte le loro rette a due a due bastantemente prolungate s'incontrerebbero in due punti. Così pure non potrebbero formarsi l'idea della similitudine geometrica, perchè mai non troverebbero, mai non potrebbero costruire sulla sfera figure eguali di forma ma diverse di grandezza (a meno d'imaginarle infinitamente piccole). Camminando sempre avanti in linea retta finirebbero per ritrovarsi al punto di partenza, dopo aver percorso l'intero circolo. Per essi lo spazio non avrebbe confini, sarebbe illimitato come per gli abitatori del piano, ma non infinito. La geometria in questa superficie è la nota geometria sferica.

Finalmente gli abitatori di uno spazio a curvatura negativa, cioè di una pseudosfera, troverebbero vero l'assioma della retta, ma non quello delle parallele. Per un punto potrebbero condurre due parallele ad una retta, l'una che va ad incontrarla all'infinito da una

parte ,l'altra dall'altra parte; e fra le due parallele una infinità di altre rette che non incontrano mai la data. La geometria in questa superficie coinçide con la parte planimetrica della teoria di LOBATSCHEWSKY. Colla pseudosfera il sig. BELTRAMI ha quindi trovato un substratum reale per questa planimetria, che LOBATSCHEWSKY, forse in mancanza di ciò, chiamava imaginaria; ed ha così messo in tutta la desiderabile evidenza l'ufficio del famoso assioma delle parallele. Ormai vediamo che esso serve a distinguere il piano dalla pseudosfera, mentre a distinguere queste due superficie dalla sfera serve l'assioma della retta, come poi a distinguere queste tre superficie da tutte le altre possibili serve l'assioma della trasportabilità di una figura invariabile.

Venendo ora agli spazi di tre dimensioni, mi basta di dire che la loro teorica presenta completa analogia con quella degli spazii di due.

Nel caso di curvatura negativa, non vige l'assioma delle parallele, bensì quello della retta, e vale la stereometria di LOBATSCHEWSKY. Se neghiamo l'XI, ammettendo tutti gli altri assiomi di EUCLIDE, compreso questo che una retta non rientri mai in se stessa, formiamo la geomeiria di LOBATSCHEWSKY, iperbolica, in cui il piano è questa superficie.

Nel caso di curvatura nulla stanno entrambi gli assiomi e vale, come già dissi, la stereometria tradizionale.

Nel caso finalmente di curvatura positiva, l'assioma della retta non vige, cioè soffre eccezioni come sulla sfera; e lo spazio è illimitato ma finito. Questi concetti dell'illimitato e del finito, che si dissero in contrasto (sono tra le antinomie di KANT), adesso li vediamo invece perfettamente conciliabili tra loro: per due dimensioni, nella superficie sferica, vedendo ciò coll'occhio usuale; per tre coll'occhio dell'analisi matematica. La esperienza ha accumulato in noi una grande contrarietà all'idea che lo spazio sia finito. Ammettendolo infinito, LEGENDRE aveva dimostrato che la somma degli angoli di un triangolo non può superare due retti: ed è forse questo il motivo per cui GAUSS e LOBATSCHEWSKY e BOLYAI, riconosciuta l'incertezza della geometria d'EUCLIDE, fabbricarono la iperbolica, senza darsi pensiero della ellittica. Eppure, se noi ammettiamo la trasportabilità di corpi invariabili, qualora la somma degli angoli di un triangolo fosse trovata di qualche cosa, sia pure estremamente piccola, maggiore di due retti, dovremmo ammettere che lo spazio è ellittico, cioè finito.

Circa la determinazione dell'indole dello spazio non voglio finalmente tacere che essa va cercata non soltanto nelle misure di triangoli

o nel riscontro di altre nozioni geometriche, bensì in generale, e direi principalmente, nella possibilità e facilità di spiegare il complesso dei fenomeni naturali. Ognuno capisce che una diversa geometria ci obbliga ad interpretare diversamente questi fenomeni, a costruire tutt'altramente l'edificio delle scienze fisiche. Se i concetti empirici, sui quali è fondata l'idea usuale dello spazio, venisser meno nella investigazione della natura, se, p. e., come oggi sembrerebbe, il concetto di corpo solido nell'infinitamente piccolo cessasse di sussistere, diverrebbe legittimo il dubitare che l'indole dello spazio nell'infinitamente piccolo potesse non essere conforme alle ipotesi, agli assiomi sperimentali della greca geometria; e il dubbio prenderebbe sempre più consistenza quando da altre ipotesi scaturissero spiegazioni più semplici di importanti classi di fenomeni. E però se non vogliamo che i nostri progressi nella cognizione del mondo rischino di essere ritardati da pregiudizi tradizionali più formidabili di quello che volle per tanti secoli immobile la terra, dobbiamo pur volgere i nostri studi anche sulla interpretazione dei fenomeni, sulla forma che assumono le leggi naturali nelle ipotesi di spazii diversi dall'euclideo. Altre potenti ragioni consigliano siffatti studi, fra le quali questa, che il paragone delle leggi di uno spazio con quelle di altri fa conoscere quali leggi siano più essenziali, quali meno. Anche questi studii ora furono principiati. Fra i matematici che li intrapresero citerò, tra noi, il sig. GENOCCHI, che nella memoria *Dei primi principii della meccanica e della geometria (in relazione al postulato d'Euclide)*, stampata nel 1869 fra quelle della Società dei XL, fatto vedere come l'assioma d'ARCHIMEDE sulla leva tragga seco l'assioma d'EUCLIDE sulle parallele, mostra che negando quello si principia una statica in geometria iperbolica; per la quale, mentre così riescono diverse le formole per la composizione delle forze parallele, sussistono inalterate per la composizione delle concorrenti le formole usuali. Ciò era facile a prevedersi; come sono facili a prevedersi, riflettendo sempre alla diversità dell'XI e all'identità degli altri assiomi per queste due geometrie, molte altre conclusioni, tra le quali anche la seguente esposta dal prof. SCHERING di Gottinga nell'articolo su *La forza di gravità nello spazio gaussiano*, stampato fra le notizie di quella Società Scientifica pel 1870: ogni movimento infinitamente piccolo di un corpo solido può essere riguardato e come risultante di soli movimenti lineari secondo tre assi, e come risultante di sole rotazioni intorno a tre assi; mentre nello spazio euclideo è permessa la seconda, ma non in generale la prima scomposizione.

Ma non voglio abusare oltre misura della vostra cortese attenzione, e però non aggiungo altro al mal tessuto discorso geometrico, pregandovi mi concediate di chiudere la solennità con un augurio che il cuore mi ispira siccome degno e fausto per tutti e particolarmente per voi, o giovani, che siamo qui convenuti ad accogliere in festa. Quest'augurio emana dal ricordo di uno tra i sommi che lo splendor della scienza seppe rendere più caro, vorrei dire perfetto, con le virtù del cuore; ricordo che è a un tempo conforto e dovere in chi professa scienze esatte in questo Ateneo. . . . . . .(5)

(5) [Qui seguiva l'elogio di ANTONIO BORDONI, che, con qualche ampliamento, fu riprodotto dall'Autore nel discorso successivo 2].

2

ALLA MEMORIA DI ANTONIO BORDONI,
NELLA RACCOLTA DI AUTOGRAFI INEDITI PRESENTATA A

FRANCESCO BRIOSCHI

NELLA CELEBRAZIONE DEL XXV ANNIVERSARIO (1887)
DELLA FONDAZIONE DEL POLITECNICO DI MILANO.

Al suo maestro FRANCESCO BRIOSCHI
nel XXV anniversario
della fondazione della Scuola per gli ingegneri in Milano
FELICE CASORATI
professore nell'Università di Pavia
e negli anni 1868-75 anche in essa scuola.

Sapendo quanta riconoscenza sia in Voi per quell'Illustre, che, intuita nello studente FRANCESCO BRIOSCHI possente attitudine matematica congiunta ad insuperabile energia, ne prese vivo interesse, ne incoraggiò gli studi, ed appena potè, lo volle professore nella Facoltà da esso diretta in Pavia; sapendo con quanta tenerezza e venerazione ricambiavate l'amicizia posta in Voi dal grande Maestro, di cui foste il più caro e siete il più insigne discepolo, e di cui, fondando il Politecnico, avete mirabilmente coronati gli sforzi per la superiore istruzione tecnica nel nostro paese, penso di non potere in modo a Voi più accetto unirmi a celebrare il XXV anniversario della fondazione della Vostra Scuola, che dedicando le pagine a me concesse in questo Album alla memoria di ANTONIO BORDONI.

Non un elogio adeguato a tale uomo oso io propormi; ma solo un tentativo di indicare quanto fosse il valore dello scienziato, e come a tanto valore facessero preziosa corona le molte virtù del maestro.

Per delineare l'eminenza del suo posto nel mondo matematico, prenderò a considerarlo da cime ancora più eminenti.

La storia della più importante fra le matematiche discipline, di

quella che ci va discoprendo la compagine dell'universo, la storia della meccanica ci presenta tre epoche siccome le più caratteristiche, insino ad ora, del suo svolgimento teoretico, epoche ciascuna segnata dal nome di un grande pensatore. Questi tre genii sono figli di terra italiana, e l'umanità li inchina e li ama sotto i nomi di ARCHIMEDE, di GALILEO e di LAGRANGE. ARCHIMEDE fondava la statica, GALILEO la cinetica e LAGRANGE raccoglieva in mirabile unità le conquiste dei Secoli XVII e XVIII per le quali massimamente vanno celebrati HUYGENS, NEWTON, i BERNOULLI e D'ALEMBERT, traducendo metodicamente i problemi della meccanica in problemi di puro calcolo differenziale ed integrale. Ed anche in questo fecondissimo campo della matematica pura LAGRANGE compariva gigante, segnandone con EULERO uno dei periodi di maggiore progresso [1]. LAGRANGE non ebbe, come ARCHIMEDE, la fortuna di poter volgere i teoremi ad immediata difesa della patria; nè, come GALILEO, l'altissimo ufficio di ricondurre le menti alla smarrita via del progresso; nè, come l'uno e l'altro, l'occasione di unire il proprio nome a scoperte ed invenzioni d'intelligenza e d'uso popolare. Perciò, egli non conserverà la popolarità che ebbe a Berlino, quando FEDERICO volle lui, *filosofo senza strepito*, a capo dell'Accademia; ed a Parigi, quando BUONAPARTE ambiva nell'Istituto di sedere tra lui e LAPLACE. Ma questo svanire della popolarità non scema d'una linea, agli occhi di chi può mirarla, l'altezza scientifica del grandissimo Torinese, che l'allora divisa e debole Italia cedette ai potenti stranieri.

Dei lavori di sì grande matematico, ANTONIO BORDONI fu non soltanto conoscitore profondo ed ardente propagatore, ma ben anche uno dei continuatori più vigorosi.

Nato nel 1788 presso Pavia, e percorsi in otto anni tutti i gradi degli studi, egli fu eletto, non ancora ventenne (1807), a professore nella scuola militare instituita da NAPOLEONE in detta città, e nel 1816 fu chiamato all'Università a supplire il BRUNACCI nella cattedra di Calcolo sublime, Geodesia ed Idrometria. BORDONI occupò questa cattedra dal 1818 al 1841; anno in cui una riforma di studii diede mala occasione di restringere l'azione di lui alla Geodesia ed Idrometria soltanto. Insegnò queste materie sino al 1852, limitandosi poscia all'ufficio di Direttore della Facoltà, che teneva già dal 1844, e tenne sino al termine di sua vita, nel 1860.

[1] Non penso con ciò raccomandare il metodo delle derivate; come testè non ho inteso affermare che vantaggioso fosse in ogni senso il chiudere, che LAGRANGE fece, la meccanica nell'ambito della teorica delle sue funzioni analitiche.

In mezzo alle cure dei tre simultanei insegnamenti, gravissime per tal uomo, che ogni lezione voleva modello di linguaggio succinto, eppur chiaro e matematicamente preciso, e di materia saviamente misurata alla capacità degli scolari, l'amore della scienza, la perseveranza ed il robusto ingegno gli diedero forza di mettere in luce ricchissima e svariata serie di preziosi lavori.

Fra quelli di maggior mole, e pubblicati a parte, ricorderò: il *Trattato dei contorni delle ombre ordinarie* (1816), il *Trattato degli argini di terra* (1820), il *Trattato di geodesia elementare* (I^a ed. 1823, II^a ed. 1843, III^a ed. 1859), le *Annotazioni agli elementi di Meccanica e d'Idraulica del prof. G. Venturoli* (I^a ed. 1823, II^a ed. 1833), le *Proposizioni teoriche e pratiche di Matematica* (1819, 1829, 1830, 1842), le *Lezioni di Calcolo sublime* (1831), il *Trattato delle divise dei campi e delle campagne* (1834), le *Ricerche sopra gli esami scolastici* (1837), l'*Opuscolo sull'acqua uscente da una bocca* (I^a ed. 1846, II^a ed. 1853).

Le sue numerosissime Memorie uscirono in luce sia in separati opuscoli, stampati a Pavia ed a Milano, sia negli Atti della Società Italiana, nel Giornale di BRUGNATELLI, negli Atti dell'Istituto Lombardo. Esse riguardavano soggetti svariatissimi; però, se si prescinde da quelle di carattere più strettamente scolastico oppure tecnico, si aggruppano specialmente intorno alla meccanica razionale ed alla applicazione dell'analisi alla geometria [2].

Manca in questo luogo lo spazio, e mancherebbero in me le forze a far manifesto tutto il valore accumulato in siffatte pubblicazioni. *Il loro complesso costituisce un monumento di gloria italiana, e la nazione dev'essere grata all'uomo che seppe elevarlo anche in mezzo a pesanti e svariate occupazioni scolastiche. Noi potremmo facilmente mostrare quanti nuovi acquisti per la scienza siano contenuti in quei lavori e rivendicare nello stesso tempo all'Italia alcune scoperte straniere. Ma conosciamo troppo da vicino l'illustre autore per dubitare che quest'opera possa tornare a lui grata.* Così esprimevasi nel Giornale dell'Ingegnere-Architetto di Milano del 1860 chi, per la intima conoscenza del Maestro e delle matematiche discipline era ed è universalmente stimato il più competente a dire di ANTONIO BORDONI. Nè in me è spenta la speranza che un anno di quiete, dopo lungo turbinio di lavori e di vicende straordinarie, permetta all'autorevole scrittore di fare ciò che l'allora vivo BORDONI non gli avrebbe concesso. E per intanto, ricordando giudizii molte volte profferiti da in-

[2] Cfr. *Memorie e documenti per la storia dell'Università di Pavia e degli uomini più illustri che v'insegnarono*. Pavia, 1878.

signi uomini nell'ateneo pavese [3], io dirò che i lavori di BORDONI sono in generale condotti a termine con pazienza e finitezza antiche; che, per profondità e larghezza di idee, e per ricchezza ed efficacia di artifizii analitici, vanno segnalati fra i più notevoli; e che particolarmente, in quel fecondissimo campo dell'applicazione dell'analisi alla geometria, che fu dischiuso ai geometri nella sua odierna larghezza dalla celebre opera di MONGE, essi attestano una potenza forse non superata da verun altro matematico del suo tempo.

Ma quantunque adorno di sì alti pregi, il nome di BORDONI non divenne familiare agli scienziati d'oltralpe, ed alla posterità matematica non giungerà forse così chiaro come quelli dei grandi matematici suoi contemporanei di Francia e di Germania. E per quali ragioni? Parecchie posso quì accennarne anch'io; il che farò, cominciando da una che, per compenso, assaissimo contribuì a creargli in Lombardia fama stragrande di scienziato e di maestro incomparabile.

BORDONI, adunque, non si chiuse, come dissero di GAUSS nella specola di Gottinga, in santuario quasi impenetrabile, per darsi esclusivamente alle ricerche scientifiche. Egli, benchè schivo di ricevimenti e degli svaghi cittadini, aperse la casa ai migliori tra i suoi scolari, e con loro ed in loro prò ebbe caro di passare buona parte delle sue ore di sollievo. E poichè il maggior numero di essi s'avviava alla professione dell'ingegnere, ne venne che le questioni d'indole tecnica da loro sollevate, insieme con le esigenze delle lezioni di geodesia e idrometria, lo indussero a contenere troppo spesso le potenti aspirazioni verso la matematica pura, per risolvere problemi e comporre memorie e trattati a vantaggio della ingegneria. Questi lavori hanno assorbito troppa parte, oso ripetere, del tempo e dell'ingegno suo; perocchè sta forse in essi la principale cagione del fatto singolare, che BORDONI siasi fermato al periodo lagrangiano, rimanendo estraneo al sempre più crescente movimento matematico che durante la sua vita andavasi esplicando in Europa. Per tal fatto mancarono a BORDONI le occasioni migliori di entrare in rapporti personali con gli scienziati stranieri, come a questi i motivi ordinariamente più efficaci di interessarsi alle pubblicazioni di lui. I suddetti lavori poi riboccano bensì pur'essi di matematici pregi; ma non potevano conferire che pochissimo alla diffusione e durata della sua fama, non riuscendo a vincere in pratica utilità quegli altri che in paesi più fortunati si andavano pubblicando per l'impulso e con tutti gli aiuti delle scuole politecniche, ricche d'insegnamenti, di col-

(3) Cfr. p. e. ancora le citate *Memorie etc.*

lezioni, di vita tecnica, che per noi Lombardi sino alla fondazione della Scuola di Milano furono un desiderio.

BORDONI non ebbe la sorte di trovarsi, come CAUCHY a Parigi [4], in una grande città, in cui la parola è ascoltata da nazionali e stranieri, donde gli scritti, in lingua notissima, volano a farsi leggere per tutto il mondo, e dove l'emulazione fra molti insigni colleghi e l'impulso d'una grande Accademia possono cooperare, con gli onori e le liberalità di un governo amante dello splendore nazionale, a movere il genio e incitarlo nel sentiero della gloria. Ben diverse erano le condizioni dell'ambiente in cui gli uomini di studio in Lombardia ebbero a trovarsi specialmente negli ultimi trent'anni di dominazione straniera. La luce del loro ingegno, nonchè irradiare a decoro della nazione al di là delle Alpi, era in gran parte impedita di diffondersi persino dalle interne barriere politiche della infelice penisola. Ond'è che dotti stranieri poterono sentenziare troppo scarso il valore scientifico degli italiani; ed altresì l'una regione italica conoscere troppo poco lo stato intellettuale delle altre. Che ignoti all'estero fossero molti studi dei matematici d'Italia, fu espresso eloquentemente dal BORCHARDT, continuatore del celebre giornale di CRELLE, quando narrò come, venendo nel 1843 STEINER, JACOBI e DIRICHLET, tre fra i sei più illustri matematici tedeschi della scorsa metà del secolo, col BORCHARDT stesso e col sig. SCHLAFLI, a passare l'inverno in Roma, *restarono stupiti di scoprire in Italia uomini meritevoli dei primi onori della scienza in Europa.*

BORDONI scrisse esclusivamente in lingua italiana; e sacrificò spesso la fluidità del periodo, e qualche volta fors'anche un po' della chiarezza, alla concisione, della quale era studiosamente sollecito anche nel parlare.

Altre fra le cagioni della poca ricerca che gli stranieri fecero e dell'inadeguata attenzione che perfino italiani diedero alle pubblicazioni di BORDONI furono e l'aver egli, quasi direi, celato alcune idee e metodi generali sotto la veste di questioni particolari, e l'avere talvolta tralasciato le notizie storiche e quei discorsi comparativi che insieme con quelle giovano assai, specialmente tra le difficoltà delle cose matematiche, a ricreare ed orientare il lettore, ed informarlo delle novità di metodo o di sostanza dovute all'autore. Studiando, per esempio, la sua memoria del 1821 *Sull'equilibrio astratto delle volte*, si resta sorpresi di trovarvi i principii della dottrina delle coordinate curvilinee che suolsi attribuire totalmente a GAUSS.

(4) Prima e dopo il regno di Luigi Filippo.

E chiunque leggerà le sue *Lezioni di calcolo sublime* si meraviglierà, io credo, tanto di non aver trovato in principio neppure una modestissima indicazione delle belle novità contenutevi, quanto di non leggervi notizia alcuna sulle origini del calcolo, nè tampoco i nomi di LEIBNIZ e di NEWTON. Lagrangiano per eccellenza, in questa eminente opera, si discostò affatto nel riguardo storico dal lodatissimo esempio del maestro. Ripugnante, per una delle molte esagerazioni che ci narra la storia del genio, a tutto che non fosse riducibile a precisione o certezza matematica, come escluse dai suoi trattati d'ingegneria cose praticamente essenziali, perchè non gli parevano atte a ricevere la detta precisione, così tralasciò nelle *Lezioni di calcolo* ed altrove le notizie storiche, delle quali ad accertare a suo modo pure piccola parte, egli diceva, non avrebbe bastato l'intera sua vita.

Ma, se nell'Europa scientifica la fama di BORDONI non saliva ad altezza proporzionata all'ingegno ed alla operosità di lui, nella sua Università ed in tutta Lombardia, mi piace ripeterlo, la stima e l'affetto gli crescevano d'attorno a venerazione: il suo nome vi diventava simbolo popolare del vero sapiente e del maestro perfetto.

I ritrovi familiari coi suoi discepoli, mentre per la loro indole troppo spesso applicativa rallentavano, come dissi, invece d'accelerare i suoi passi nella via della gloria, conferivano però efficacemente, insieme con tutta l'altra azione sua, ad innamorare della scienza i giovani più capaci, ed a suscitare in tutti i suoi discepoli proponimenti altamente morali.

Completando l'opera delle lezioni comuni, come in larga misura i seminari ed i corsi privatissimi delle università germaniche, questi ritrovi dovevano eccitare in più alto grado l'attività intellettuale, principiando ad erudire, addestrare allo studio e alla critica dei lavori originali, ed a originali ricerche incamminando. Non voglio però esagerare la vivezza scientifica di queste conversazioni. Già dissi che BORDONI cessò troppo presto di partecipare al movimento delle matematiche pure. Nondimeno è certo che i suoi allievi divenuti scienziati riconoscono da lui quel grandissimo bene che è il culto della scienza, culto che preserva da vanità ed egoismo, e dura quanto la vita. Ond'è che una storia fedele riconoscerebbe, io credo, nell'azione di BORDONI, combinata con quella matematicamente più viva del suo maggiore discepolo, una delle precipue ragioni del cresciuto vigore che la matematica italiana ha manifestato in questi ultimi decenni.

Ma di ancor maggior rilievo, per l'estesa sua efficacia nell'educazione delle provincie lombarde, fu l'azione morale dell'esemplare maestro. Perocchè, ben si sa che una nazione non sale a durevole

grandezza se non quando l'educazione non solo addestri le menti, ma sappia dei giovani formare cittadini costumati, operosi, leali, fermi nei propositi, non restii ai sacrifici e sempre gelosi custodi della propria dignità. Orbene, chiunque sia stato anche per poco nella consuetudine di ANTONIO BORDONI potrà dirvi quanta autorità dovesse esercitare quest'uomo nella formazione del carattere della numerosa gioventù succedutasi nei quarantacinque anni del suo professorato. Quest'uomo di alto e severo aspetto, di cui il portamento e lo sguardo, come ogni parola, ogni atto, rivelavano la potenza del pensiero, la purezza e bontà dell'animo; quest'uomo riservato, modesto, ma fieramente dignitoso; sempre animato dal desiderio di aggiungere coraggio e lume ai giovani nella via degli studi; sempre ugualmente nobile e semplice di costumi e di modi, nella casa come nella scuola; sempre di giusto rigore nel compiere e nel volere che ciascuno compisse il proprio dovere; sempre e dovunque, sia con gli studenti come coi professori, quale scienziato o maestro od amico, d'una superiorità non voluta da lui, ma sentita da tutti, un tal uomo doveva irresistibilmente esercitare un impero straordinario, affrettare sul suo stesso cammino i migliori, infondere vigoria ai vacillanti, raddrizzare molte tendenze meno generose.

Sapendo tutto questo, non è meraviglia che, non soltanto i matematici, ma i professori e gli studenti di tutte le Facoltà e la città intiera riverissero con spontaneo ossequio, in questa figura invariabilmente semplice e grande, la mente e l'avvenire dello studio matematico, una purissima gemma dell'università e della nazione. E troverete ben giusto che i suoi allievi gli creassero, nel ritorno alle famiglie, per tutta Lombardia la fama immensa di cui già dissi, e che, all'estinguersi dell'amata sua voce, sieno concorsi con pietoso unanime pensiero a ricordare per sempre degnamente l'effigie nell'Ateneo ch'egli ebbe sì caro e che tanto onorò.

Ed io, che, se non nella scuola, giunsi in tempo per raccogliere nella casa gli ultimi consigli del non mai stanco benefattore, componendo la sua memoria coi voti per il bene del paese, sento il dovere di augurare, a giusta conclusione di queste righe, che il nome di ANTONIO BORDONI si abbia un giorno a leggere scolpito anche nei portici della Scuola di Milano: meritato omaggio a tant'uomo e pegno di perpetuo accordo con la Scuola di Pavia; e che l'esempio di lui, ch'ebbe sì splendido successo nell'opera scientifica e politecnica di FRANCESCO BRIOSCHI, brilli ancora sempre benefico nella mente dei maestri e degli scolari venturi sì dell'una che dell'altra scuola lombarda.